MA2115 Clase 11: Ecuaciones Homogéneas

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

Definicion 1 *Se dice que $f(x,y)$ es una* función homogénea *de grado n, si existe un número real n tal que*

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y),$$

para todos los números reales t,x,y para los cuales ambas expresiones están definidas.

Ejemplo 1

1. *La función $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ es homogénea de grado $n = 3/2$. En efecto, para*

$$f(tx,ty) = \sqrt{(tx)^3+(ty)^3} = \sqrt{t^3\left(x^3+y^3\right)} = t^{3/2}\sqrt{x^3+y^3} = t^{3/2}f(x,y).$$

Es decir, $f(tx,ty) = t^{3/2}f(x,y)$.

2. *La función $f(x,y) = \dfrac{x}{2y}+4$ es homogénea de grado $n=0$. En efecto,*

$$f(tx,ty) = \frac{tx}{2ty}+4 = \frac{x}{2y} = t^0\left(\frac{x}{2y}+4\right) = t^0 f(x,y).$$

Por lo tanto, $f(tx,ty) = t^0 f(x,y)$.

3. *La función $f(x,y) = x^2+y^2+1$ no es homogénea. En efecto, por una parte, tenemos que $f(tx,ty) = t^2x^2+t^2y^2+1 = t^2\left(x^2+y^2\right)+1$ y, por otra parte, $t^n f(x,y) = t^n\left(x^2+y^2+1\right) = t^n\left(x^2+y^2\right)+t^n$ de donde*

$$f(tx,ty)-t^n f(x,y) = t^2\left(x^2+y^2\right)+1-t^n\left(x^2+y^2+1\right) = \left(t^2-t^n\right)\left(x^2+y^2\right)+1-t^n.$$

Así, si $f(x,y)$ fuera homogenea, existiría n tale que $\left(t^2-t^n\right)\left(x^2+y^2\right)+1-t^n = 0$ para todo t,x,y. En particular, para $x=y=0$, tendríamos que $1-t^n=0$, de donde $t^n=1$, para todo t; es decir, n debería ser 0, $f(tx,ty)-f(x,y) = \left(t^2-1\right)\left(x^2+y^2\right)$ debería ser 0, para todo t,x,y, y llegaríamos finalmente a la ecuación $1-t^2=0$, para todo t, la cual no se cumple. En conclución, $f(x,y)$ no es homogénea para ningún grado n.

1 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definicion 2 *Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ donde*

$$\begin{aligned} M(tx,ty) &= t^n M(x,y) \\ N(tx,xy) &= t^n N(x,y) \end{aligned}$$

se dice que es una ecuación diferencial homogénea.

Una ecuación diferencial de primer orden es aquéllas que se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Si hacemos $y = ux$ ó $x = vy$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. Así, la ecuación (1) se transforma en

$$x\frac{du}{dx} = F(u) - u.$$

De esta forma reducimos la ecuación homogénea a una ecuación de variables separables.

Ejemplo 2 *Resolver la ecuación* $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

Solución: La ecuación $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ la podemos escribir como

$$y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy} = \frac{\dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2 + \dfrac{y}{x}}, \quad x \neq 0.$$

Es decir, tenemos una ecuación de la forma (1). Sea $z = \dfrac{y}{x}$. Entonces, substituyendo $z = \dfrac{y}{x}$ en la ecuación anterior y usando $y' = z + xz'$ tenemos que

$$z + z'x = \frac{z + z^2}{2 + z}.$$

Por lo tanto,

$$z'x = \frac{z + z^2}{2 + z} - z = \frac{z + z^2 - 2z - z^2}{2 + z} = \frac{-z}{2 + z}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{2 + z}{z}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}.$$

Integrando ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz &= -\int \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow 2\ln|z| + z &= -\ln|x| + C \end{aligned}$$

y ahora cambiamos la variable para obtener

$$2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y}{x} = -\ln|x| + C.$$

Finalmente, observemos que si $x = 0$ entonces $y = 0$ también es solución.

Ejemplo 3 *Resolver la ecuación* $(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$.

Solución: La ecuación $(x^2-y^2)dx-2xydy=0$ es homogénea. Sea $y=ux$, de donde $dy=udx+xdu$ y

$$\begin{aligned} 0=(x^2-y^2)dx-2xydy &= (x^2-u^2x^2)dx-2xux(udx+xdu) \\ &= x^2(1-u^2)dx-2x^2u(udx+xdu)=x^2(dx-u^2dx-2u^2dx-2xudu) \end{aligned}$$

con lo cual $x^2(dx-u^2dx-2u^2dx-2xudu)=0$ y, en consecuencia, $(1-3u^2)dx=2xudu$. Por lo tanto, podemos separar las variables en la forma

$$\frac{dx}{x}-\frac{2udu}{1-3u^2}=0$$

y ahora integramos para obtener

$$\ln|x|+\frac{1}{3}\ln\left|1-3u^2\right|=\ln C.$$

Por último, haciendo el cambio de variable $u=\dfrac{y}{x}$ y aplicando la exponencial en ambos miembros, obtenemos $x^3\left(1-3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)=C$.

Ejemplo 4 *Resolver* $(x^3-3y^2)dx+2xydy=0$.

Solución: $(x^3-3y^2)dx+2xydy=0$ es homogénea.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3y^2}{2xy}-\frac{x^2}{2xy} \\ \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\cdot\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y/x} \end{aligned}$$

Sea $u=\dfrac{y}{x}$ ó $y=ux$ entonces $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ luego

$$\begin{aligned} u+x\frac{du}{dx} &= \frac{3}{2}u-\frac{1}{2u} \\ x\frac{du}{dx} &= \frac{u}{2}-\frac{1}{2u}=\frac{u^2-1}{2u} \\ \frac{2udu}{u^2-1} &= \frac{dx}{x} \\ \ln|u^2-1| &= \ln|x|+\ln|C| \\ \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2-1\right| &= \ln|Cx| \\ \left(\frac{y}{x}\right)^2-1 &= Cx \\ y^2-x^2 &= Cx^3 \\ y^2 &= x^2+Cx^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 5 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$, $y(0) = 1$.

Solución: Sea $u = x + y$, de donde $\dfrac{du}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} - 1 = \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{u}} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{u}} + 1 = \frac{1+\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \\ \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} du &= dx \end{aligned}$$

Sea $u = z^2$ entonces $du = 2zdz$ de donde

$$\begin{aligned} \frac{2z^2}{1+z} dz &= dx \\ 2\left(z - 1 + \frac{1}{1+z}\right) dz &= dx \\ 2\left(\frac{z^2}{2} - z + \ln|1+z|\right) &= x + C \\ z^2 - 2z + \ln(1+z)^2 &= x + C \\ u - 2\sqrt{u} + \ln(1+\sqrt{u})^2 &= x + C \\ x + y - 2\sqrt{x+y} + \ln(1+\sqrt{x+y})^2 &= x + C \end{aligned}$$

Usando las condición inicial $y(0) = 1$, es decir $x = 0$, $y = 1$ tenemos que $1 - 2 + \ln 2^2 = C$ de donde $C = 2\ln 2 - 1$. Así obtenemos la solución,

$$y - 2\sqrt{x+y} + \ln(1+\sqrt{x+y})^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Ejemplo 6 *Resolver* $2xy\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$.

Solución: Esta ecuación la podemos escribir como

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{y/x} + \frac{3}{2}\frac{y}{x}.$$

Sea $u = \dfrac{y}{x}$ entonces $y = ux$ y $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. Entonces

$$\begin{aligned}
u + x\frac{du}{dx} &= 2\frac{1}{u} + \frac{3}{2}u \\
x\frac{du}{dx} &= \frac{2}{u} + \frac{u}{2} = \frac{u^2+4}{2u} \\
\frac{2u}{u^2+4}du &= \frac{dx}{x} \\
\ln|u^2+4| &= \ln|x| + \ln C \\
u^2+4 &= Cx \\
\frac{y^2}{x^2}+4 &= Cx \\
y^2+4x^2 &= Cx^3.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7 *Resolver* $x\dfrac{dy}{dx} = y + (x^2-y^2)^{1/2}$, $y(1) = 0$.

Solución: $x\dfrac{dy}{dx} = y + (x^2-y^2)^{1/2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \left(1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)^{1/2}$.

Sea $u = \dfrac{y}{x}$. Entonces $y = ux \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. Así,

$$\begin{aligned}
u + x\frac{du}{dx} &= u + (1-u^2)^{1/2} \\
x\frac{du}{dx} &= (1-u^2)^{1/2} \\
\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \frac{dx}{x} \\
\operatorname{sen}^{-1} u &= \ln|x| + C \\
\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{x} &= \ln|x| + C.
\end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales $x = 1$, $y = 0$, tenemos que $\operatorname{sen}^{-1} 0 = \ln 1 + C \Rightarrow C = 0$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{x} &= \ln|x| \Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{sen}(\ln|x|) \\
y &= x\operatorname{sen}(\ln|x|).
\end{aligned}$$

2 Reducción de Orden

Es muy frecuente, en las ecuaciones diferenciales poder reducir de orden a objeto de obtener una ecuación diferencial de más fácil solución. Estudiaremos como resolver una ecuación diferencial de la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Veamos los siguientes casos:
Caso 1: En la ecuación diferencial falta y, es decir, la ecuación tiene la forma $F(x, y', y'') = 0$, la cual resolveremos con el cambio $y' = u$, para obtener

$$F(x, u, u') = 0.$$

Ejemplo 8 *Encuentre la solución general de la ecuación diferencial* $x^2y'' + (y')^2 = 0$.

Solución: Sea $u = y'$. Entonces $u'' = y'$ y la ecuación $x^2y'' + (y')^2 = 0$ viene a ser $x^2u' + u^2 = 0$. Ahora resolvemos la nueva ecuación usando separación de variables:

$$\begin{aligned}
x^2u' + u^2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad u' + \frac{1}{x^2}u^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}u^2 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x^2} \\
&\Longrightarrow \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{x} + C_1 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{u} = -\frac{1 + C_1x}{x} \Longrightarrow u = -\frac{x}{1 + C_1x}.
\end{aligned}$$

De donde nos queda la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{x}{1 + C_1x} \\
y' &= \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{1 + C_1x} \\
y &= \frac{x}{C_1} - \frac{\ln(1 + C_1x)}{C_1^2} + C_2
\end{aligned}$$

Caso 2: En la ecuación diferencial falta x, es decir, la ecuación tiene la forma $F(y, y', y'') = 0$. Haciendo el cambio $y' = z$ y observando que $y'' = z' = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot z$, tenemos que la ecuación se transforma en

$$G\left(y, z, \frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Ejemplo 9 *Encuentre la solución general de la ecuación diferencial* $y^2y'' = y'$.

Solución: Como en la ecuación $y^2y'' = y'$ falta x, estamos en el segundo caso, y tenemos que hacer el cambio de variable, $z = y'$, $z\dfrac{dz}{dy} = y''$, con lo cual obtenemos

$$y^2z\frac{dz}{dy} = z.$$

Así,

$$\begin{aligned}
y^2 z\frac{dz}{dy} = z \quad & \Longrightarrow \quad y^2\frac{dz}{dy} = 1 \\
& \Longrightarrow \quad dz = \frac{dy}{y^2} \Longrightarrow z = -\frac{1}{y} + C \\
& \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Cy-1}{y} \Longrightarrow \frac{y}{Cy-1}dy = dx \\
& \Longrightarrow \quad \int\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{Cy-1}\right)dy = \int dx \\
& \Longrightarrow \quad \frac{y}{C} + \frac{\ln(Cy-1)}{C^2} = x + C_2
\end{aligned}$$

De donde obtenemos la solución:

$$Cy + \ln(Cy-1) = C^2x + C_3.$$

Ejemplo 10 *Resuelva la ecuación diferencial* $yy'' = (y')^2\left(1 - y'\cos y + yy'\operatorname{sen} y\right)$.

Solución: En la ecuación

$$yy'' = (y')^2\left(1 - y'\cos y + yy'\operatorname{sen} y\right) \tag{2}$$

no aparece la variable x, de modo que estamos en el segundo caso. Sea $y' = z$. Entonces, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ y, substituyendo en (2), obtenemos

$$yz\frac{dz}{dy} = z^2\left(1 - z\cos y + yz\operatorname{sen} y\right).$$

Si y es constante, entonces $z = 0$ y ambos miembros de la ecuación se anulan, con lo cual $y = C$ es solución de la ecuación. En caso contrario, $z \neq 0$, y podemos dividir por z para obtener

$$\begin{aligned}
y\frac{dz}{dy} &= z\left(1 - z\cos y + yz\operatorname{sen} y\right) \\
\Longleftrightarrow \frac{dz}{dy} &= \frac{z}{y} - z^2\frac{\cos y}{y} + z^2\operatorname{sen} y \\
\Longleftrightarrow \frac{dz}{dy} &- \frac{1}{y}z = z^2\left(\operatorname{sen} y - \frac{\cos y}{y}\right).
\end{aligned}$$

Denotando $\dfrac{dz}{dy} = z'$, la última ecuación viene a ser

$$z' - \frac{1}{y}z = z^2\left(\operatorname{sen} y - \frac{\cos y}{y}\right),$$

y esta ecuación es de Bernoulli. Haciendo el cambio $u = z^{-1}$, tenemos que $u' = -z^{-2}z'$, de donde $z' = -z^2u'$ obtenemos

$$-z^2u' - \frac{1}{y}z = z^2\left(\operatorname{sen} y - \frac{\cos y}{y}\right)$$

y simplificando obtenemos la ecuación lineal de 1er orden

$$u' + \frac{u}{y} = \frac{\cos y}{y} - \operatorname{sen} y;$$

aplicando el método del factor integrante, $\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln|y|} = |y|$, obtenemos la solución

$$u = \frac{1}{y}\left(\int y\left(\frac{\cos y}{y} - \operatorname{sen} y\right) dy + C\right),$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} = \frac{1}{y}\left(\int (\cos y - y \operatorname{sen} y) dy + C\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{y}\left(y\cos y + C\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{z} = \frac{1}{y}\left(y\cos y + C\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad x = C\ln|y| + \operatorname{sen} y + C_2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 11 *Encuentre la solución general de la ecuación diferencial* $yy'' = 2\left(y'\right)^2 - 2y'$.

Solución: Sea $z = y'$, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$. Así,

$$\begin{aligned}
yy'' &= 2\left(y'\right)^2 - 2y' \\
yz\frac{dz}{dy} &= 2z^2 - 2z \\
y\frac{dz}{dy} &= 2z - 2 \\
\frac{dz}{z-1} &= 2\frac{dy}{y} \\
\ln|z-1| &= 2\ln|Ay|, A \in \mathbb{R} \\
\ln|z-1| &= \ln(Ay)^2 \\
z - 1 &= (Ay)^2,
\end{aligned}$$

como $z = y'$,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (Ay)^2 + 1 \\
\frac{dy}{(Ay)^2 + 1} &= dx \\
\frac{1}{A}\arctan(Ay) &= x + C, C \in \mathbb{R} \\
\arctan(Ay) &= Ax + AC \\
y &= \frac{\tan(Ax + B)}{A}, B = AC.
\end{aligned}$$

Correcciones: Boris Iskra

May 13, 2008